

## 6

## Vektoren und Matrizen

## 6.1

## Rekursive Definition einer Determinante

Die Determinante einer quadratischen  $(n,n)$ -Matrix  $A = (a_{ik})$  wird dargestellt in den Formen

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.1.1)$$

Die Determinantenfunktion einer  $(2,2)$ -Matrix berechnet sich wie folgt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (6.1.2)$$

Für eine Matrix vom Typ  $(3,3)$  liefert die Determinantenfunktion

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Für diese lange Formel gibt es eine Merkhilfe von Sarrus, die lautet: Hauptdiagonalenprodukte addieren, Nebendiagonalenprodukte subtrahieren. Dies zeigt anschaulich die Abbildung 6.1.

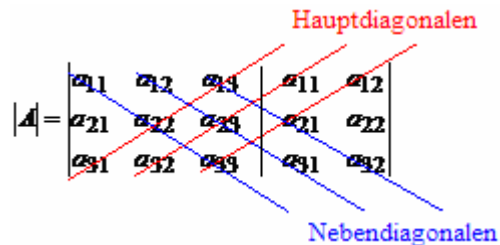


Abb. 6-1 Sarrus-Regel

Diese Sarrus-Regel wollen wir schon einmal vorab programmieren.

Tab. 6-1 Determinante einer (3,3)-Matrix nach der Sarrus-Regel

Eingabe der Koeffizienten $a_{ik}$ der Matrix $A(3,3)$ in ein leeres Blatt
So lange keine 1-reihigen Unterdeterminanten vorhanden sind
Anwendung der Entwicklungsformel
Ausgabe der Determinanten

Wie gewohnt erstellen wir wieder ein Formblatt, ein Berechnungsbeispiel und eine Auswertung als Prozeduren.

Code 6-1 Bestimmung der Determinante einer (3,3)-Matrix nach der Sarrus-Regel

```
Option Explicit

Sub Sarrus_Leer()
    ThisWorkbook.Worksheets("Sarrus").Cells.Clear
    Range("A:E").ColumnWidth = 5
End Sub

Sub Sarrus_Testdaten()
    Cells(1, 1) = 0: Cells(1, 2) = 2: Cells(1, 3) = 4
    Cells(2, 1) = 6: Cells(2, 2) = 4: Cells(2, 3) = 2
    Cells(3, 1) = 1: Cells(3, 2) = 3: Cells(3, 3) = 6
End Sub

Sub Sarrus_Prinzip()
```

```
Dim i, j, k, l, n As Integer
Dim s, p, d As Double
Dim MyDoc As Object

Set MyDoc = ThisWorkbook.Worksheets("Sarrus")
n = MyDoc.UsedRange.Rows.Count

If Not n = 3 Then
    MsgBox "Die Sarrus-Regel gilt nur für 3-reihige
           Matrizen!", vbOKOnly, "ACHTUNG!"
    Exit Sub
End If

'Übertragung
For i = 1 To 3
    For k = 1 To 3 - 1
        Cells(i, k + 3) = Cells(i, k)
    Next k
Next i

'Hauptdiagonalen
' i=1,2,3 - 1,2,3 - 1,2,3
' k=1,2,3 - 2,3,4 - 3,4,5
d = 0
s = 0
For j = 1 To 3
    p = 1
    For i = 1 To 3
        k = i + j - 1
        p = p * Cells(i, k)
    Next i
    s = s + p
Next j
d = s

'Nebendiagonalen
' i=3,2,1 - 3,2,1 - 3,2,1
' k=1,2,3 - 2,3,4 - 3,4,5
s = 0
For j = 1 To 3
    p = 1
    For i = 3 To 1 Step -1
        k = 3 - i + j
        p = p * Cells(i, k)
    Next i
    s = s + p
Next j
```

```

Next j

'Determinante
d = d - s
Cells(6, 1) = d
End Sub

```

Die Testdaten liefern das nachfolgend in Abbildung 6-2 dargestellte Ergebnis.

	A	B	C	D	E
1	0	2	4	0	2
2	6	4	2	6	4
3	1	3	6	1	3
4					
5					
6	-12				
7					

Abb. 6-2 Testergebnis

Bevor wir uns nun um die Bestimmung der Determinanten einer beliebigen  $(n,n)$ -Matrix kümmern, wollen wir noch einige nützliche Definitionen einführen.

Streicht man in einer Determinanten eine beliebige Zeile  $i$  und außerdem eine beliebige Spalte  $k$ , so nennt man das Element  $a_{ik}$ , das im Schnittpunkt liegt, das Schnittpunkt-Element. Das Schnittpunkt-Element liegt also sowohl in der gestrichenen Zeile, wie auch in der gestrichenen Spalte.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Schnittpunkt-Element  $a_{32}$

Abb. 6-3 Schnittpunkt-Element

Die durch die Streichung übrig bleibenden Elemente nennt man die Unterdeterminante  $|A_{ik}|$ . Für die Darstellung nach Abbildung 6-3 ist somit

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Zum Schluss definieren wir noch eine Vorzeichenfunktion, die jeder Unterdeterminanten einen Vorzeichenfaktor zuordnet.

$$|A_{ik}| \rightarrow V_{ik} = (-1)^{i+k} \quad (6.1.4)$$

Das Produkt aus Vorzeichenfaktor und Unterdeterminante nennt man auch algebraisches Komplement  $A_{ik}$ .

Nun können wir uns an die Definition einer  $n$ -reihigen Determinante durch ihre Unterdeterminanten wagen. Diese Formel wird auch Entwicklungsformel genannt.

Gegeben sei eine 3-reihige Matrix.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6.1.5)$$

Im ersten Schritt streichen wir die erste Zeile und nacheinander alle vorhandenen Spalten. Es entstehen drei Unterdeterminanten:

$$\begin{aligned} |A_{11}| &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ |A_{12}| &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ |A_{13}| &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Jetzt bilden wir die Summe über die Produkte von Vorzeichenfaktor, Schnittpunkt-Element und Unterdeterminante und erhalten

$$|A| = V_{11} \cdot a_{11} \cdot |A_{11}| + V_{12} \cdot a_{12} \cdot |A_{12}| + V_{13} \cdot a_{13} \cdot |A_{13}| \quad (6.1.7)$$

Wir erhalten die Determinante einer n-reihigen Matrix nach der Entwicklungsformel

$$|A| = \sum_{j=1}^n V_{1j} \cdot a_{1j} \cdot D_{1j} \quad (6.1.8)$$

Durch mehrfache Anwendung der Entwicklungsformel kann man rekursiv jede Determinante durch einreihige Determinanten ausdrücken. Diese sind per Definition

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}. \quad (6.1.9)$$

**Tab. 6-2** Rekursive Bestimmung einer Determinante

Eingabe der Koeffizienten $a_{ik}$ der Matrix $A(n,n)$
So lange keine 1-reihigen Unterdeterminanten vorhanden sind
Anwendung der Entwicklungsformel
$ A  = \sum_{j=1}^n V_{1j} \cdot a_{1j} \cdot D_{1j}$
Ausgabe der Determinanten

Ein Tabellenblatt Determinante wird zunächst mit einer Prozedur geleert. Eine weitere Prozedur stellt Testdaten in das Tabellenblatt. Eine weitere Prozedur liest die Daten aus dem Tabellenblatt und berechnet rekursiv die Determinante mittels der Funktion Udet.

**Code 6-2** Rekursive Bestimmung einer Determinante

```
Option Explicit

Sub Determinante_Leer()
    ThisWorkbook.Worksheets("Determinante").Cells.Clear
End Sub
```

```
Private Sub Determinante_Testdaten()  
    Cells(1, 1) = 1: Cells(1, 2) = 2  
    Cells(1, 3) = 0: Cells(1, 4) = 3  
    Cells(2, 1) = -1: Cells(2, 2) = 0  
    Cells(2, 3) = 2: Cells(2, 4) = 1  
    Cells(3, 1) = 3: Cells(3, 2) = 2  
    Cells(3, 3) = 0: Cells(3, 4) = 2  
    Cells(4, 1) = 0: Cells(4, 2) = 1  
    Cells(4, 3) = 7: Cells(4, 4) = 1  
End Sub  
  
Sub Determinante_Berechnung()  
    Dim i, j, k, m, n, p, q, u, v, x, A(), w() As Integer  
    Dim D As Long  
    Dim MyDoc As Object  
    Set MyDoc = ThisWorkbook.Worksheets("Determinante")  
    n = MyDoc.UsedRange.Rows.Count  
  
    'Einlesen der Matrix  
    ReDim A(n, n)  
    For i = 1 To n  
        For k = 1 To n  
            A(i, k) = Cells(i, k)  
        Next k  
    Next i  
  
    'Ausgabe  
    Cells(n + 2, 1) = UDet(A)  
End Sub  
  
Function UDet(A) As Long  
    Dim B() As Integer  
    Dim i, j, k, p As Integer  
    Dim n As Long  
  
    n = UBound(A, 1)  
  
    If n = 1 Then  
        UDet = A(1, 1)  
    Else  
        For j = 1 To n  
            ReDim B(n - 1, n - 1)  
            p = 0  
            For k = 1 To n  
                If k <> j Then  
                    p = p + 1  
                End If  
            Next k  
        Next j  
    End If  
End Function
```

```

        For i = 2 To n
            B(i - 1, p) = A(i, k)
        Next i
    End If
Next k
UDet = UDet + A(1, j) * (-1) ^ (1 + j) * UDet(B())
Next j
End If
End Function

```

Das Ergebnis aus den Testdaten zeigt die Abbildung 6-4. Die Determinante der (4,4)-Matrix hat den Wert -20.

	A	B	C	D
1	1	2	0	3
2	-1	0	2	1
3	3	2	0	2
4	0	1	7	1
5				
6	-20			
7				

**Abb. 6-4** Testdatenauswertung

Betrachten wir nun den Laplaceschen Entwicklungssatz. Er unterscheidet sich von der vorherigen Entwicklungsformel nur dadurch, dass eine beliebige Zeile bzw. Spalte ausgewählt wird.

So ergibt sich nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz für eine  $\text{Typ}(3,3)$ -Matrix, sortiert nach der ersten Zeile

Ebenso ergibt sich nach dem Laplaceschen

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \\
 &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 &= +a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 &(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+2} a_{11} \det(A_{12}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22}) + (-1)^{3+2} a_{32} \det(A_{32})
 \end{aligned}$$

(6.1.5)

Entwicklungssatz für eine Typ(3,3)-Matrix  
sortiert nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \\
 &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 &= +a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 &(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13})
 \end{aligned}$$

(6.1.4)

Rückwirkend definieren wir so eine Untermatrix  $A_{ik}$  als die Matrix, die aus einer  $(n,n)$ -Matrix  $A$  durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte entsteht.

Als Kofaktoren werden die Faktoren

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \det(A_{ik}) \quad (6.1.6)$$

bezeichnet, die sich zum Element  $a_{ik}$  oder zur Position  $(i,k)$  der Matrix  $A$  bestimmen.

Die rekursive Berechnung einer Determinanten ergibt sich nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz aus ...

... einer Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile für  $i=1,2,\dots,n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} \quad (6.1.7)$$

... einer Entwicklung nach der  $k$ -ten Spalte für  $k=1, 2, \dots, n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} \quad (6.1.8)$$

Auch hier lassen sich alle Unterdeterminanten auf die Berechnung von einreihigen Determinanten zurückführen.

Eine weitere Optimierung liegt darin, dass Zeilen, bzw. Spalten gesucht werden, in denen besonders viele Elemente den Wert Null haben. Diese Optimierung überlasse ich dem Leser.

Determinanten haben noch gewisse Eigenschaften, die eine Berechnung ebenfalls optimieren können. Diese wollen wir zum Abschluss betrachten.

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten vertauscht werden.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6.1.9)$$

Erinnern wir uns, dass eine solche Umwandlung einer Matrix  $A$  als Transponierte  $A^T$  bezeichnet wird. Wir können also auch schreiben

$$\det A = \det A^T. \quad (6.1.10)$$

Werden zwei Zeilen oder Spalten einer Matrix vertauscht, dann behält die Determinante ihren Wert, ändert aber ihr Vorzeichen.

Beispiel: Vertauschen der 1. mit der 3. Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{21} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (6.1.11)$$

Die Multiplikation einer beliebigen Zeile oder Spalte mit einem Skalar  $\lambda$  ist auch eine

Multiplikation der Determinanten mit dem Skalar.

Beispiel: Multiplikation mit der 3. Spalte

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \lambda \cdot a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & \lambda \cdot a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & \lambda \cdot a_{33} \end{vmatrix} \quad (6.1.12)$$

Aus dieser Eigenschaft folgt eine weitere Eigenschaft.

Ein gemeinsamer Faktor einer beliebigen Zeile oder Spalte kann vor die Determinante gezogen werden.

Beispiel: Die Elemente der 3. Zeile haben den Faktor  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda \cdot a_{31} & \lambda \cdot a_{32} & \lambda \cdot a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6.1.13)$$

Der Wert einer Determinanten ist Null, wenn mindestens eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Zwei Zeilen oder Spalten stimmen überein.
2. Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind ein vielfaches der Elemente einer anderen Zeile oder Spalte. Man sagt auch, dass sie einander proportional oder dass sie linear abhängig sind.
3. Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.

Beispiel: In der folgenden Determinante sind die 2. und die 3. Zeile linear abhängig

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 12 & 3 \end{vmatrix} \quad (6.1.14)$$

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile oder Spalte ein

beliebig Vielfaches einer anderen Zeile oder Spalte addiert.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Das 2-fache der 3. Zeile wird zur 1. Zeile addiert:

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.1.15)$$

Die Determinante eines Matrizenprodukts ist gleich dem Produkt der Determinanten der Matrizen.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad (6.1.16)$$

Beispiel:

$$\left( \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 16 & 10 \end{vmatrix} = 14 \cdot 10 - 10 \cdot 16 = -20$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$$

(6.1.17)

## 6.2

### Lösungen von Gleichungssystemen

Dem Algorithmus im Buch fehlt der Zeilentausch zur Verringerung von Rundungsfehlern. Dazu ist es zweckmäßig, vor jedem Eliminationsschritt einen Zeilentausch so durchzuführen, dass das betragsgrößte Element aller  $a_{ik}^*$  ( $i=k+1, \dots, n$ ) zum Pivotelement wird (Spaltenpivotisierung).

Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass der Betrag der Determinante von A nicht geändert

wird, doch es wechselt das Vorzeichen bei jedem Zeilentausch.

In den Lösungsalgorithmus muss also eine Vergleichsschleife integriert werden.

**Tab. 6-3** Zeilentausch mit dem betragsgrößten Element

$v=1$ Vorzeichenänderung durch Vertauschung	
$i = k+1 (1) n$	
Ist $a_{ik} > a_{kk}$	
Ja	Nein
$j = 1 (1) n$	./.
$u = a_{kj}$	
$a_{kj} = a_{ij}$	
$a_{ij} = u$	
$v = v \cdot (-1)$	

Die Prozeduren Gauss\_Elimination und Gauss\_Auswertung ändern sich dadurch in die nachfolgende Form.

**Code 6-3** Prozeduränderungen

```
Option Explicit

Sub Gauss_Auswertung()
  Dim i, j As Integer
  Dim s, v As Double

  Call Gauss_Daten_lesen

  v = 1
  Call Gauss_Elimination(v)

  Call Gauss_Rückwärtsrechnung

  'Ausgabe
  For i = 1 To m
    For j = 1 To n
      Cells(m + 1 + i, j) = a(i, j)
    Next j
    Cells(m + 1 + i, n + 2) = y(i)
  Next i
End Sub
```

```
For j = 1 To n
    Cells(2 * m + 3, j) = x(j)
Next j

'Testrechnung
s = 0
For j = 1 To n
    s = s + a(1, j) * x(j)
Next j
Cells(2 * m + 3, n + 2) = s * v
End Sub

Sub Gauss_Elimination(v)
    Dim c, u As Double
    Dim i, j, k As Integer
    v = 1

    For i = 1 To m - 1

        'Ergänzung
        For j = i + 1 To m
            If a(j, i) > a(i, i) Then
                For k = 1 To n
                    u = a(j, k)
                    a(j, k) = a(i, k)
                    a(i, k) = u
                Next k
                v = v * -1
            End If
        Next j

        For j = i + 1 To m
            c = a(j, i) / a(i, i)
            For k = 1 To n
                a(j, k) = a(j, k) - c * a(i, k)
            Next k
            y(j) = y(j) - c * y(i)
        Next j
    Next i
End Sub
```

### 6.3 Differenzenverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Approximation der Randbedingung des einseitig eingespannten Trägers (Beispiel im Buch) über den Rand des Balkens symmetrisch fortgesetzt, kann je nach Schrittweite zu größeren Fehlern führen. Denn durch eine symmetrische Fortsetzung der Biegelinie hat das Moment an der Einspannstelle einen parabelförmigen Verlauf.

Mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung von  $y(x)$  kann man jedoch verbesserte Formeln herleiten, die sich dadurch auszeichnen, dass sie in höherer Ableitung stetig sind. Leider bleibt das auf diese Weise aufgestellte Gleichungssystem nicht immer symmetrisch.

So gilt an der Stelle  $x_i$

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) \quad (6.3.1)$$

und für die erste Ableitung nach Gleichung

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i &= \frac{1}{2 \cdot h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-h)^n}{n!} y^{(n)}(x_i) \right) \\ \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i &= y'(x_i) + \frac{h^2}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_i) + \dots \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

(6.3.4) im Buch

Für die Ableitungen erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
y'_i &= \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i - \frac{h^2}{6} y'''(x_i) - \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_i) - \dots \\
y''_i &= \left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_i - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i) - \dots \\
y'''_i &= \left( \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \right)_i - \frac{h^2}{4} y^{(5)}(x_i) - \dots \\
y^{(4)}_i &= \left( \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} \right)_i - \frac{h^2}{6} y^{(6)}(x_i) - \dots
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

In diesen Formeln werden die höheren Ableitungen durch Differenzenformeln ersetzt und es ergeben sich

$$\begin{aligned}
y'(x_i) &= \frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}) \\
&+ \frac{h^4}{30} y^{(5)}(x_i) + \dots \\
y''(x_i) &= \frac{1}{12h^2} \begin{pmatrix} -y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i \\ +16y_{i+1} - y_{i+2} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{h^4}{90} y^{(6)}(x_i) + \dots \\
y'''(x_i) &= \frac{1}{8h^3} \begin{pmatrix} y_{i-3} - 8y_{i-2} + 13y_{i-1} \\ -13y_{i+1} + 8y_{i+2} - y_{i+3} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{7h^4}{120} y^{(7)}(x_i) + \dots \\
y^{(4)}(x_i) &= \frac{1}{6h^4} \begin{pmatrix} -y_{i-3} + 12y_{i-2} - 39y_{i-1} \\ +56y_i - 39y_{i+1} + 12y_{i+2} \\ -y_{i+3} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{7h^4}{240} y^{(8)}(x_i) + \dots
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Damit ergeben sich verbesserte Differenzenformeln. Ein Nachteil ist jedoch offensichtlich, denn durch weitere Stützstellen kommen mehr äußere Punkte in die Gleichungen.

Oft mehr, als Randbedingungen zur Verfügung stehen. Man hilft sich dann damit, dass in Randnähe z. B. mit einfachen Differenzenformeln gearbeitet wird.

So können wir in das Gleichungssystem nach Tabelle 6-4 (auch im Buch)

**Tab. 6-4** Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc}
 Y_{-2} & -4Y_{-1} & +6Y_0 & -4Y_1 & +Y_2 & & = 0 \\
 Y_{-1} & & -4Y_0 & +6Y_1 & -4Y_2 & + Y_3 & = 0 \\
 & & & Y_0 & -4Y_1 & +6Y_2 & -4Y_3 & + Y_4 & = 0 \\
 & & & & Y_1 & -4Y_2 & +6Y_3 & -4Y_4 & +Y_5 & = 0 \\
 & & & & & Y_2 & -4Y_3 & +6Y_4 & -4Y_5 & + Y_6 & = 0
 \end{array}$$

die dritte Gleichung durch eine verbesserte Gleichung nach 6.3.4 ersetzen.

**Tab. 6-5** Gleichungssystem mit teilweise verbesserten Differenzen

$$\begin{array}{rcccccccc}
 Y_{-2} & -4Y_{-1} & +6Y_0 & -4Y_1 & +Y_2 & & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & \\
 Y_{-1} & & -4Y_0 & +6Y_1 & -4Y_2 & + Y_3 & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & \\
 - & Y_{-1} & 12Y_0 & - & +56Y_2 & - & +12 & -Y_5 & = & 0 \\
 & & & & 39Y_1 & & 39Y_3 & Y_4 & & & \\
 & & & & Y_1 & -4Y_2 & +6Y_3 & -4Y_4 & +Y_5 & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & Y_2 & -4Y_3 & +6Y_4 & - & + & = \\
 & & & & & & & & 4Y_5 & Y_6 & 0
 \end{array}$$

Indem wir auch hier die erste Gleichung fallen lassen und die entsprechenden Randwertbedingungen wie im Buch beschrieben einsetzen, folgt letztlich das nachfolgende Gleichungssystem.

**Tab. 6-6** Umgeformtes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc}
 -4Y_0 & +7Y_1 & -4Y_2 & + Y_3 & & = 0 \\
 12Y_0 & -40Y_1 & +56Y_2 & -38Y_3 & + 10Y_4 & = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 y_1 & -4y_2 & +5y_3 & -2y_4 & = & 0 \\
 & 2y_2 & -4y_3 & +2y_4 & = & c
 \end{array}$$

Die Auswertung nach Gauß liefert allerdings das gleiche Ergebnis.

	A	B	C	D	E	F
1	7	-4	1	0		0
2	-40	56	-38	10		0
3	1	-4	5	-2		0
4	0	2	-4	2		0,03
5						
6	7	-4	1	0		0
7	0	33,1428571	-32,2857143	10		0
8	0	0	1,51724138	-0,96551724		0
9	0	0	0	0,09090909		0,03
10						
11	0,03	0,105	0,21	0,33		0

**Abb. 6-5** Testdatenauswertung