

# 3

## Lösungen linearer Gleichungssysteme

### 3.1 Lösungen linearer Gleichungssysteme

#### Beispiel: Temperaturverteilung

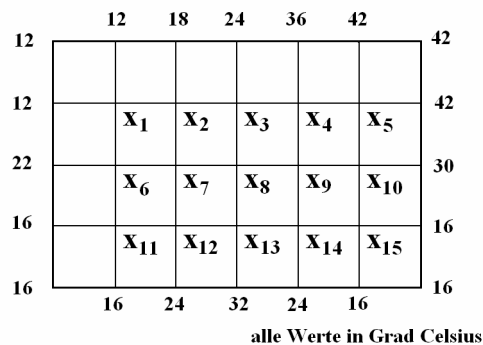


Abb. 3-1 Gitternetz

Die Temperaturverteilung innerhalb eines Kanals mit rechteckigem Querschnitt wird durch die Laplace-Gleichung beschrieben. An der Rohrwand werden unterschiedliche Temperaturen gemessen. Es sollen die Temperaturen an den angegebenen Punkten bestimmt werden unter der Annahme, dass ein innen liegender Punkt den Mittelwert aller benachbarten Punkte hat.

Das vorhandene Programm soll als Ergänzung eine Prozedur erhalten, mit deren Hilfe die Randtemperaturen verändern werden können.

Dazu müssen wir die Randwerte als Variable in die Gleichungen eingehen lassen.

		$T_{12}$	$T_{13}$	$T_{14}$	$T_{15}$	$T_{16}$	
$T_{21}$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$T_{27}$
$T_{31}$		$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$T_{37}$
$T_{41}$		$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$T_{47}$
		$T_{52}$	$T_{53}$	$T_{54}$	$T_{55}$	$T_{56}$	

alle Werte in Grad Celsius

Jeder Punkt geht zu einem Viertel in die Gleichungen ein und da wir nicht umständlich mit Brüchen arbeiten wollen, multiplizieren wir auch hier die Gleichungen mit 4 und so ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 x1: 4x_1 - x_2 - x_6 &= T_{12} + T_{21} \\
 x2: -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_7 &= T_{13} \\
 x3: -x_2 + 4x_3 - x_4 - x_8 &= T_{14} \\
 x4: -x_3 + 4x_4 - x_5 - x_9 &= T_{15} \\
 x5: -x_4 + 4x_5 - x_{10} &= T_{16} + T_{27} \\
 x6: -x_1 + 4x_6 - x_7 - x_{11} &= T_{31} \\
 x7: -x_2 - x_6 + 4x_7 - x_8 - x_{12} &= 0 \\
 x8: -x_3 - x_7 + 4x_8 - x_9 - x_{13} &= 0 \\
 x9: -x_4 - x_8 + 4x_9 - x_{10} - x_{14} &= 0 \\
 x10: -x_5 - x_9 + 4x_{10} - x_{15} &= T_{37} \\
 x11: -x_6 + 4x_{11} - x_{12} &= T_{41} + T_{52} \\
 x12: -x_7 - x_{11} + 4x_{12} - x_{13} &= T_{53} \\
 x13: -x_8 - x_{12} + 4x_{13} - x_{14} &= T_{54} \\
 x14: -x_9 - x_{13} + 4x_{14} - x_{15} &= T_{55} \\
 x15: -x_{10} - x_{14} + 4x_{15} &= T_{47} + T_{56}
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Gehen wir davon aus, dass die Randwerte zuvor in das untere Schema manuell eingegeben werden, dann ändert sich die Prozedur Werte und die Prozedur Auswertung wie in Code 3-1 dargestellt. Ein Formblatt sorgt dann für eine neue Eingabe. Die Anzahl der Zeilen kann beim

Lesen nicht mehr bestimmt werden und wird mit 15 vorgegeben.

**Code 3-1** Bestimmung der Temperaturverteilung nach der Gauß-Elimination / geänderte Version

```
Option Explicit

Private Sub Formblatt
    Dim Shp As Shape

    'Tabelle löschen
    Worksheets("Temperaturverteilung").Activate
    Worksheets("Temperaturverteilung").Cells.Clear
    For Each Shp In Shapes
        Shp.Delete
    Next
End Sub

'Gauss-Elimination
Private Sub Werte(n, A, x)
    Dim i, j As Integer

    Range("A1:P15").ColumnWidth = 5
    Range("A20:G24").Select
    Selection.NumberFormat = "0.00"

    For i = 1 To n
        For j = 1 To n + 1
            Cells(i, j) = 0
            If i = j Then Cells(i, j) = 4
        Next j
    Next i
    Cells(1, 2) = -1: Cells(1, 6) = -1
    Cells(2, 1) = -1: Cells(2, 3) = -1
    Cells(2, 7) = -1
    Cells(3, 2) = -1: Cells(3, 4) = -1
    Cells(3, 8) = -1
    Cells(4, 3) = -1: Cells(4, 5) = -1
    Cells(4, 9) = -1
    Cells(5, 4) = -1: Cells(5, 10) = -1
    Cells(6, 1) = -1: Cells(6, 7) = -1
    Cells(6, 11) = -1
    Cells(7, 2) = -1: Cells(7, 6) = -1
    Cells(7, 8) = -1: Cells(7, 12) = -1
    Cells(8, 3) = -1: Cells(8, 7) = -1
    Cells(8, 9) = -1: Cells(8, 13) = -1
```

```

Cells(9, 4) = -1: Cells(9, 8) = -1
Cells(9, 10) = -1: Cells(9, 14) = -1
Cells(10, 5) = -1: Cells(10, 9) = -1
Cells(10, 15) = -1
Cells(11, 6) = -1: Cells(11, 12) = -1
Cells(12, 7) = -1: Cells(12, 11) = -1
Cells(12, 13) = -1
Cells(13, 8) = -1: Cells(13, 12) = -1
Cells(13, 14) = -1
Cells(14, 9) = -1: Cells(14, 13) = -1
Cells(14, 15) = -1
Cells(15, 10) = -1: Cells(15, 14) = -1

Cells(1, 16) = Cells(20, 2) + Cells(21, 1)
Cells(2, 16) = Cells(20, 3)
Cells(3, 16) = Cells(20, 4)
Cells(4, 16) = Cells(20, 5)
Cells(5, 16) = Cells(20, 6) + Cells(21,7)
Cells(6, 16) = Cells(22, 1)
Cells(7, 16) = 0
Cells(8, 16) = 0
Cells(9, 16) = 0
Cells(10, 16) = Cells(22, 7)
Cells(11, 16) = Cells(23, 1) + Cells(24 ,2)
Cells(12, 16) = Cells(24, 3)
Cells(13, 16) = Cells(24, 4)
Cells(14, 16) = Cells(24, 5)
Cells(15, 16) = Cells(23, 7) + Cells(24,6)
End Sub

Private Sub Werte_Lesen(n, A, x)
  Dim i, j As Integer

  'Bestimmung belegter Zeilen
  'und Definition der notwendigen Datenfelder
  Cells(Rows.Count,1).End(xlUp).Select
  n = 15
  ReDim A(n, n + 1), x(n) As Double
  For i = 1 To n
    For j = 1 To n + 1
      A(i, j) = Cells(i, j)
    Next j
  Next i
End Sub

Private Sub Subtrahiere_Gleichung(A, n, i, j)

```

```

Dim k As Integer
Dim c As Double

c = A(j, i) / A(i, i)
For k = i + 1 To n + 1
    A(j, k) = A(j, k) - c * A(i, k)
Next k
End Sub
Private Function Summe(A, x, n, i)
    Dim s As Double
    Dim k As Integer

    s = A(i, n + 1)
    For k = i + 1 To n
        s = s - A(i, k) * x(k)
    Next k
    Summe = s
End Function

Sub Auswertung()
    ReDim A(1, 1), x(1) As Double
    Dim n, i, j, k As Integer

    n = 15
    ReDim A(n, n + 1), x(n) As Double
    Call Werte(n, A, x)
    Call Werte_Lesen(n, A, x)
    For i = 1 To n - 1
        For j = i + 1 To n
            Call Subtrahiere_Gleichung(A, n, i, j)
        Next j
    Next i

    For i = n To 1 Step -1
        x(i) = Summe(A, x, n, i) / A(i, i)
        j = Int((i - 1) / 5) + 1
        k = i - (j - 1) * 5
        Cells(j + 20, k + 1) = x(i)
        Cells(i, n + 3) = x(i)
    Next i

    Cells(20, 1) = (Cells(20, 2) + Cells(21, 1)) / 2
    Cells(20, 7) = (Cells(20, 6) + Cells(21, 7)) / 2
    Cells(24, 1) = (Cells(23, 1) + Cells(24, 2)) / 2
    Cells(24, 7) = (Cells(23, 7) + Cells(24, 6)) / 2

```

```
Range("A20:G24").Select
Charts.Add
ActiveChart.ChartType = xlSurface
ActiveChart.SetSourceData _
    Source:=Sheets("Temperaturverteilung").Range( _
    "A20:G24"), PlotBy:=xlRows
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:= _
    "Temperaturverteilung"
With ActiveChart
    .HasTitle = True
    .ChartTitle.Characters.Text = "Temperaturverteilung"
    .Axes(xlCategory).HasTitle = False
    .Axes(xlSeries).HasTitle = False
    .Axes(xlValue).HasTitle = False
End With
ActiveChart.Corners.Select
With ActiveChart
    .Elevation = 25
    .Rotation = 211
End With
End Sub
```

Das Ergebnis mit geänderten Randwerten sehen Sie in der nachfolgenden Abbildung 3-3.

### 3 Lösungen linearer Gleichungssysteme

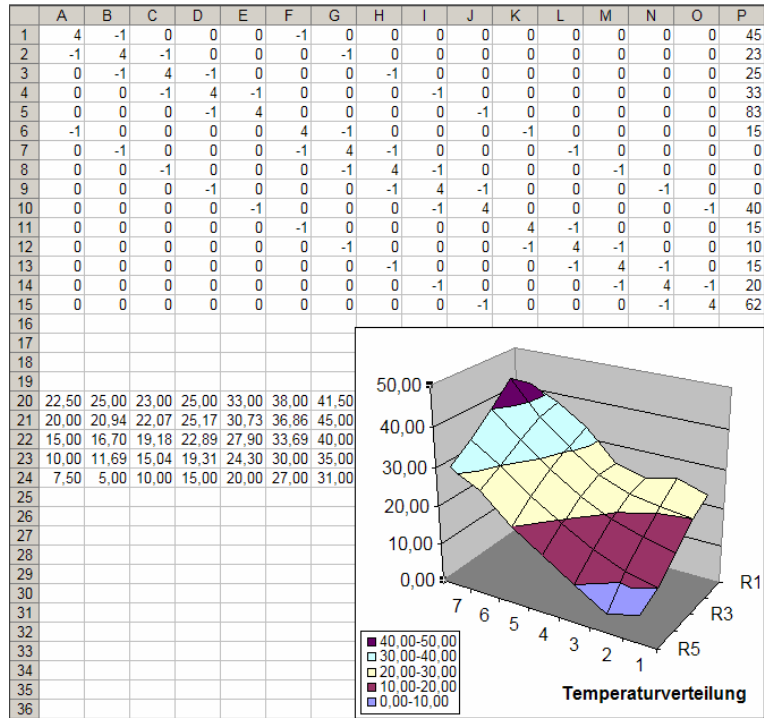


Abb. 3-3 Temperaturfeld der Testdaten

Die Eingabe der Daten könnte auch über ein Formblatt durchgeführt werden.