2 Lösungen von Gleichungen

2.1 Lösungen von quadratischen Gleichungen

Beispiel: Eindringtiefe nach Brinell

Das vorhandene Programm wird dahingehend umgestellt, dass für einen vorgegebenen Kugelradius die Eindringtiefen, für einen Abdruckradius-Bereich von 0 bis r in 10 Schritten, in der Tabelle erstellt werden.

Tab. 2-1 Struktogramm zur Bestimmung einer Eindrucktiefe-Tabelle

Eingaben Kugelradius r	
x = 0 (1) r	
	$h = r - \sqrt{r^2 - x^2}$
	Ausgabe x, h

Code 2-1 Bestimmung der Eindringtiefe und Ausgabe als Tabelle

```
Option Explicit

'Prozedur zur Erstellung eines Formblatts
Sub Brinell_Formblatt()

'Tabelle löschen
   Worksheets("Brinell").Activate
   Worksheets("Brinell").Cells.Clear

'Tabelle beschriften
   Range("A1").Value = "Kugelradius" & vbLf & "[mm]"
   Range("B1").Value = "Abdruckradius" & vbLf & "[mm]"
   Range("C1").Value = "Eindringtiefe" & vbLf & "[mm]"
```


Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

```
    Range("A1").ColumnWidth = 20
    Range("B1").ColumnWidth = 20
    Range("C1").ColumnWidth = 20
    Columns("A:C").Select
    Selection.NumberFormat = "0.000"
    Range("A2").Select
End Sub

'Prozedur zur Berechnung der Eindringtiefe
Sub Brinell_Auswertung()
    Dim r, x, h As Double
    Dim i As Integer

'Eingabewerte lesen
    r = Cells(2, 1)
    i = 0
'Berechnung
    For x = 0 To r Step r / 10
        h = r - Sqr(r * r - x * x)
'Ausgabe
        i = i + 1
        Cells(1 + i, 2) = x
        Cells(1 + i, 3) = h
    Next x
End Sub
```

	A	B	C
1	Kugelradius [mm]	Abdruckradius [mm]	Eindringtiefe [mm]
2	20,000	0,000	0,000
3		2,000	0,100
4		4,000	0,404
5		6,000	0,921
6		8,000	1,670
7		10,000	2,679
8		12,000	4,000
9		14,000	5,717
10		16,000	8,000
11		18,000	11,282
12		20,000	20,000

Abb. 2-1 Auswertung mit Beispieldaten

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

2.2 Kubische Gleichungen

Beispiel: Kugelbehälter

Welchen Durchmesser hat ein Kugelbehälter bei einem Volumen von 1814 cm^3 .

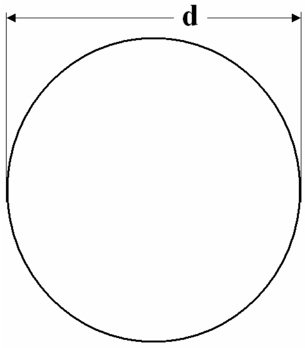


Abb. 2-2 Geschweißter Kugelbehälter

Das Volumen bestimmt sich aus der Formel

$$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^3 . \tag{2.2.1}$$

Damit ergibt sich die kubische Gleichung

$$d^3 - \frac{6 \cdot V}{\pi} = 0 = d^3 - 3464{,}488 \tag{2.2.4}$$

Mit Hilfe des Programms ergibt sich die Lösung. Der Durchmesser ist 15,13 cm groß.

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2								
3	Gleichung:	x³ +	0	x² +	0	x +	-3464,488	=
4								
5	D=		3000669,276					
6	x1=		15,13142004					
7	x2=		-7,565710019	+ i	13,1041941			
8	x3=		-7,565710019	+ i	-13,1041941			

Abb. 2-3 Berechnungsformular

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

2.3 Lösungen von Gleichungen höheren Grades

Beispiel: Minimaler Materialverbrauch

Wiederholen wir noch einmal die Aufgabenstellung.

Für eine zylindrische Konservendose (Abbildung 2-4), mit einem vorgegebenen Inhalt V, soll zur Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht werden. Das Volumen bestimmt sich aus der Gleichung

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{2.3.1}$$

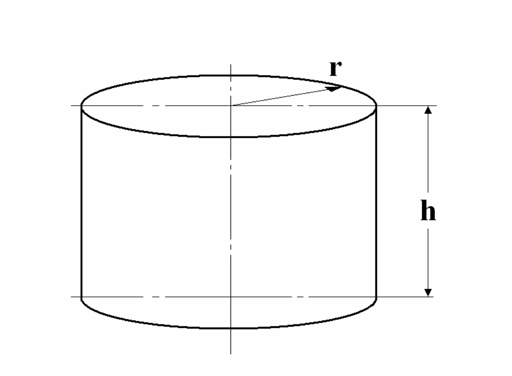


Abb. 2-4 Zylindrischer Behälter

Die Oberfläche, die eigentliche Zielgröße, bestimmt sich aus

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}, \tag{2.3.2}$$

Die Ableitungen der Oberfläche ergeben

$$O' = 4 \cdot \pi \cdot r - \frac{2 \cdot V}{r^2} \tag{2.3.3}$$

und

$$O'' = 4 \cdot \pi + \frac{4 \cdot V}{r^3}. \tag{2.3.4}$$

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

Wir wollen ein Programm schreiben, das für mehrere Volumen von 100 bis 1000 cm^3 mit einer Schrittweite von 100 die jeweiligen optimalen Durchmesser und Oberflächen bestimmt.

Die Struktur des alten Programms bleibt erhalten. Es wird lediglich eine Programmschleife mit steigendem Volumen darüber gelegt.

Tab. 2-1 Struktogramm zur Methode Regula Falsi

<table>
<tr><td colspan="6">Eingabe
Bestimmung zweier Startwerte x_1 und x_2,
so dass O(V, d_1)>0 und O(V, d_2)<=0
Abschaltwert der Iterationsschleife ε</td></tr>
<tr><td colspan="6">V=100 (100) 1000</td></tr>
<tr><td rowspan="12"></td><td colspan="5">d_1, d_2</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ist O(V, d_1) > 0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ja</td><td colspan="2">Nein</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ist O(V, d_2) <= 0</td><td colspan="2">Ist O(V, d_2) > 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ja</td><td>Nein</td><td>Ja</td><td>Nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">ok</td><td>Fehler!</td><td>tausche
d_1 mit d_2</td><td>Fehler!</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">$d = d_1 - O'(d_1)\dfrac{d_2 - d_1}{O'(d_2) - O'(d_1)}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ist O'(d)>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ja</td><td colspan="2">Nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">d_1=d</td><td colspan="2">d_2=d</td></tr>
<tr><td colspan="5">So lange wie $\left|O(V,d)\right| > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ausgabe V, d, O</td></tr>
</table>

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

Code 2-2 Bestimmung der minimalen Oberfläche

```
Option Explicit
'Prozedur zur Erstellung eines Formblatt
Sub Minimum_Formblatt()

'Tabelle löschen
   Worksheets("Minimum").Activate
   Worksheets("Minimum").Cells.Clear

'Tabelle beschriften
   Range("A1").Value = "Startwert d1 ="
   Range("A2").Value = "Startwert d2 ="
   Range("A3").Value = "Abschaltgrenze"
   Range("C1").Value = "mm"
   Range("C2").Value = "mm"

   Range("E1").Value = "Volumen [cm^3]"
   Range("F1").Value = "Durchm. [cm]"
   Range("G1").Value = "Oberfläche [cm^2]"
   Range("H1").Value = "O'(d1)"
   Range("I1").Value = "O''(d1)]"
   Range("J1").Value = "O (d2)"
   Range("K1").Value = "O'(d2)"
   Range("L1").Value = "O''(d2)]"

   Range("A1").ColumnWidth = 15
   Range("B1").ColumnWidth = 10
   Range("C1").ColumnWidth = 5
   Range("D1").ColumnWidth = 1
   Range("E1:L1").ColumnWidth = 15
   Columns("B").Select
   Selection.NumberFormat = "0.000"
   Columns("E:L").Select
   Selection.NumberFormat = "0.000"
   Range("B1").Select
End Sub

Sub Minimum_Testdaten()
   Cells(1, 2) = 10
   Cells(2, 2) = 100
   Cells(3, 2) = 0.01
End Sub
```


Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

```
Private Function Ob(V, d)         'Oberfläche in cm^3
   Dim r As Double
   Dim pi As Double
   pi = 4 * Atn(1)        'Konstante pi
   r = d / 2              'Radius in cm
   Ob = 2 * pi * r * r + 2 * V / r
End Function

Private Function Ob1(V, d)        '1. Ableitung der
Oberfläche
   Dim r As Double
   Dim pi As Double
   pi = 4 * Atn(1)        'Konstante pi
   r = d / 2              'Radius in cm
   Ob1 = 4 * pi * r - 2 * V / (r * r)
End Function

Private Function Ob2(V, d)        '2. Ableitung der
Oberfläche
   Dim r As Double
   Dim pi As Double
   pi = 4 * Atn(1)        'Konstante pi
   r = d / 2              'Radius in cm
   Ob2 = 4 * pi + 4 * V / (r * r * r)
End Function

Sub Minimum_Auswertung()
   Dim d, d1, d2, V, e, r, h As Double
   Dim i As Integer

'Eingabewerte lesen
   e = Cells(3, 2)         'Abschaltkriterium
   i = 0

'Berechnungsschleife
   For V = 100 To 1000 Step 100
      d1 = Cells(1, 2)   'Startwert 1 in cm
      d2 = Cells(2, 2)   'Startwert 2 in cm
      If Ob1(V, d1) > 0 Then
         If Ob1(V, d2) <= 0 Then
            'Startwerte korrekt
         Else
            MsgBox "Startwerte falsch!", vbInformation &
vbOKOnly
            Exit Sub
```


Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

```
         End If
      Else
         If Ob1(V, d2) > 0 Then
            d = d1: d1 = d2: d2 = d
         Else
            MsgBox "Startwerte falsch!", vbInformation &
vbOKOnly
            Exit Sub
         End If
      End If

   'Berechnung
      i = i + 1
      Cells(1 + i, 5) = V
      Cells(1 + i, 7) = Ob(V, d1)
      Cells(1 + i, 8) = Ob1(V, d1)
      Cells(1 + i, 9) = Ob2(V, d1)
      Cells(1 + i, 10) = Ob(V, d2)
      Cells(1 + i, 11) = Ob1(V, d2)
      Cells(1 + i, 12) = Ob2(V, d2)

      Do
         d = d1 - Ob1(V, d1) * (d2 - d1) / (Ob1(V, d2) -
Ob1(V, d1))
         If Ob1(V, d) > 0 Then
            d1 = d
         Else
            d2 = d
         End If
         Cells(1 + i, 6) = d

   'Abbruchkriterium
      Loop While Abs(Ob1(V, d)) > e
   Next V
End Sub
```

Mit Hilfe der verwendeten Beispieldaten ergibt sich eine Auswertung nach Abbildung 2-5. Ein Diagramm gefundener Durchmesser über Volumen zeigt, dass es einen parabelförmigen Zusammenhang zwischen Volumen und Durchmesser gibt.

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Startwert d1 =	10,000	mm		Volumen [cm^3]	Durchm. [cm]	Oberfläche [cm^2]
2	Startwert d2 =	2000,000	mm		100,000	5,031	648,319
3	Abschaltgrenze	0,010			200,000	6,339	668,319
4					300,000	7,256	688,319
5					400,000	7,986	708,319
6					500,000	8,603	728,319
7					600,000	9,142	748,319
8					700,000	9,624	768,319
9					800,000	10,062	788,319
10					900,000	10,465	808,319
11					1000,000	10,839	828,319

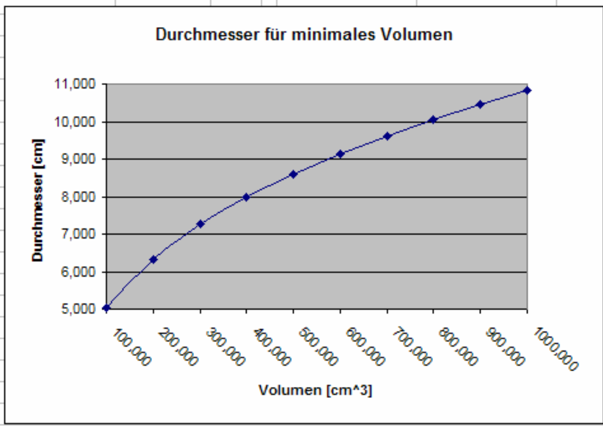
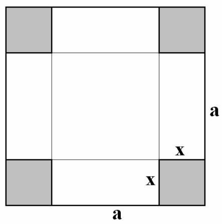


Abb. 2-5 Tabellarische Auswertung

Beispiel: Maximales Volumen

Wiederholen wir noch einmal die Aufgabenstellung.

Ein Transportbehälter soll so aus einem quadratischen Blech mit der Kantenlänge geformt werden, dass sein Volumen ein Maximum darstellt. Zur Herstellung werden die vier kleinen Quadrate an den Ecken ausgestanzt und die seitlichen Laschen gefalzt.



Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

Abb. 2-6 Blechzuschnitt

Das Volumen des Behälters bestimmt sich aus der Gleichung

$$V = x(a-2x)^2 . \tag{2.3.5}$$

Die Ableitungen ergeben hier

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 \tag{2.3.6}$$

und

$$V'' = 24x - 8a . \tag{2.3.7}$$

Gefordert ist ein Programm, das für mehrere Kantenlängen z. B. von 50 bis 250 cm, mit einer Schrittweite von 10 cm, das jeweilige Maß x zum optimalen Volumen bestimmt.

Tab. 2-5 Struktogramm zur Methode nach Newton

Eingabe Bestimmung eines Startwertes x_1 Abschaltwert der Iterationsschleife ε	
a = 50 (10) 250	
	$x = x \quad - \frac{V(a,x\quad)}{V'(a,x\quad)}$
	So lange wie $\lvert V(a,x) \rvert > \varepsilon$
	Ausgabe a, x

Code 2-3 Bestimmung des maximalen Volumens

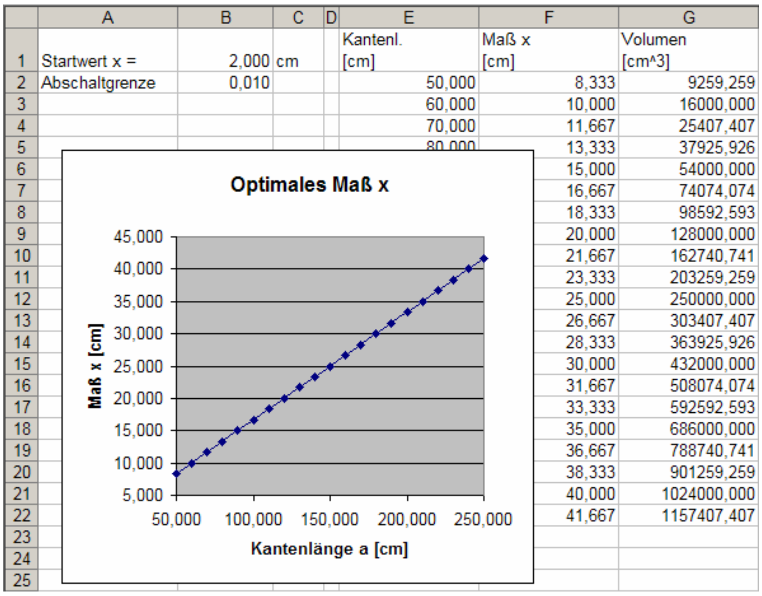
```
Option Explicit

'Prozedur zur Erstellung eines Formblatts
Sub Maximum_Formblatt()

'Tabelle löschen
   Worksheets("Maximum").Activate
   Worksheets("Maximum").Cells.Clear
```


Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

```
'Tabelle beschriften
   Range("A1").Value = "Startwert x ="
   Range("A2").Value = "Abschaltgrenze"
   Range("C1").Value = "cm"
   Range("E1").Value = "Kantenl." & vbLf & "[cm]"
   Range("F1").Value = "Maß x" & vbLf & "[cm]"
   Range("G1").Value = "Volumen " & vbLf & "[cm^3]"
   Range("H1").Value = "V'(x)"
   Range("I1").Value = "V''(x)]"

   Range("A1").ColumnWidth = 15
   Range("B1").ColumnWidth = 10
   Range("C1").ColumnWidth = 5
   Range("D1").ColumnWidth = 1
   Range("E1:I1").ColumnWidth = 15
   Columns("B").Select
   Selection.NumberFormat = "0.000"
   Columns("E:I").Select
   Selection.NumberFormat = "0.000"
   Range("B1").Select
End Sub
Sub Maximum_Testdaten()
   Cells(1, 2) = 2
   Cells(2, 2) = 0.01
End Sub

Private Function Vol(a, x)        'Volumen in cm^3
   Vol = x * (a - 2 * x) ^ 2
End Function

Private Function Vo1(a, x)        '1. Ableitung des
Volumens
   Vo1 = 12 * x * x - 8 * a * x + a * a
End Function

Private Function Vo2(a, x)        '2. Ableitung des
Volumens
   Vo2 = 24 * x - 8 * a
End Function
Sub Maximum_Auswertung()
   Dim a, x, e As Double
   Dim i As Integer

   i = 0
'Berechnungsschleife
   For a = 50 To 250 Step 10
```


Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

```
'Eingabewerte lesen
      x = Cells(1, 2)          'Startwert in cm
      e = Cells(2, 2)          'Abschaltkriterium
      i = i + 1
'Berechnung
      Cells(1 + i, 5) = a
      Cells(1 + i, 7) = Vol(a, x)
      Cells(1 + i, 8) = Vo1(a, x)
      Cells(1 + i, 9) = Vo2(a, x)
      Do
         x = x - Vo1(a, x) / Vo2(a, x)
         Cells(1 + i, 6) = x
         Cells(1 + i, 7) = Vol(a, x)
         Cells(1 + i, 8) = Vo1(a, x)
         Cells(1 + i, 9) = Vo2(a, x)

'Abbruchkriterium
      Loop While Abs(Vo1(a, x)) > e
   Next a
End Sub
```



	A	B	C	D	E	F	G
1	Startwert x =	2,000	cm		Kantenl. [cm]	Maß x [cm]	Volumen [cm^3]
2	Abschaltgrenze	0,010			50,000	8,333	9259,259
3					60,000	10,000	16000,000
4					70,000	11,667	25407,407
5					80,000	13,333	37925,926
6						15,000	54000,000
7						16,667	74074,074
8						18,333	98592,593
9						20,000	128000,000
10						21,667	162740,741
11						23,333	203259,259
12						25,000	250000,000
13						26,667	303407,407
14						28,333	363925,926
15						30,000	432000,000
16						31,667	508074,074
17						33,333	592592,593
18						35,000	686000,000
19						36,667	788740,741
20						38,333	901259,259
21						40,000	1024000,000
22						41,667	1157407,407
23							
24							
25							

Abb. 2-7 Auswertung der Testdaten

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.

Die Frage, ob es eine feste Beziehung zwischen a und x gibt, zeigt sich im dargestellten Diagramm. Dort zeigt sich ein linearer Zusammenhang zwischen a und x, und zwar ist x genau 1/6 a.

Harald Nahrstedt, Algorithmen für Ingenieure, ISBN 3-8348-0015-5.