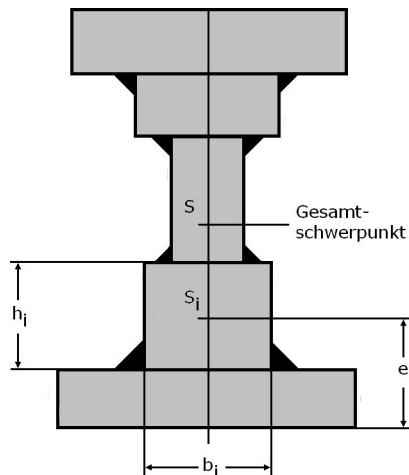


## 4 Festigkeitsberechnungen

Von Maschinenteilen und Bauwerken wird *Festigkeit* verlangt. Durch alle möglichen Belastungen und deren Kombinationen dürfen keine bleibenden Formänderungen auftreten, noch darf es zum Bruch kommen. Die Festigkeitslehre hat die Aufgabe, auftretende Spannungen zu berechnen und somit ein Maß für die Sicherheit, bzw. daraus resultierende Abmessungen vorzugeben.

### 4.1 Hauptspannungen eines zusammengesetzten Biegeträgers

In der Praxis treten sehr häufig Biegeträger auf, die sich aus einzelnen rechteckigen Querschnitten zusammensetzen, die außerdem symmetrisch zur Achse liegen.



**Bild 4-1**  
Geschweißter Biegeträger

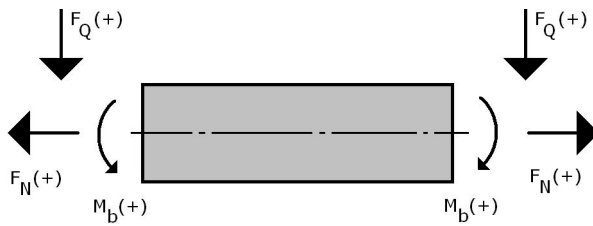
Der gemeinsame Schwerpunkt der Rechtecke ergibt sich bezüglich einer beliebigen Achse aus

$$e = \frac{\sum_{i=1}^n A_i e_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (4.1)$$

Sinnvoller Weise nimmt man als Achse eine Außenkante des Trägers. Das gesamte Flächenträgheitsmoment ist nach Aussage des Steiner'schen Satzes

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i}{12} h_i^3 + A_i e_i^2 \right) - e^2 \sum_{i=1}^n A_i \quad (4.2)$$

Unter Beachtung der in Bild 4-2 festgelegten Vorzeichen betrachten wir die am Biegeträger auftretenden Spannungen.



**Bild 4-2**  
Beschleunigte Drehung

Vorhandene Zugspannung:

$$\sigma_Z = \frac{F_N}{A}. \quad (4.3)$$

Vorhandene Abscherspannung:

$$\tau_a = \frac{F_Q}{A}. \quad (4.4)$$

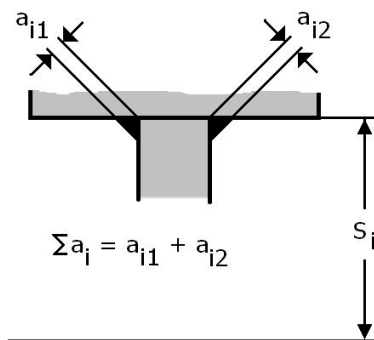
Randfaserbiegespannungen:

$$\sigma_{b1} = \frac{M_b(H-e)}{I}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{b2} = -\frac{M_b e}{I}. \quad (4.6)$$

Aus diesen folgen nach einer Vergleichsspannungs-Hypothese die Randfaserhauptspannungen

$$\sigma_{hj} = \frac{1}{2}(\sigma_{bj} + \sigma_Z + \sqrt{(\sigma_{bj} + \sigma_Z)^2 + 4\tau_a^2}), j = 1, 2. \quad (4.7)$$



**Bild 4-3**  
Schweißnähte

Weiterhin interessieren die in den Schweißnähten auftretenden Spannungen.

Schweißnaht-Biegespannung:

$$\sigma_{bSi} = \frac{M_b}{I}(s_i - e). \quad (4.8)$$

Schweißnaht-Abscherspannung:

$$\tau_{\text{asi}} = \frac{F_Q b_i h_i |e_i - e|}{I \sum a_i} \quad (4.9)$$

Daraus ergibt sich analog zu Gleichung (4.7)

$$\sigma_{\text{hsi}} = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{bsi}} + \sigma_Z + \sqrt{(\sigma_{\text{bsi}} + \sigma_Z)^2 + 4\tau_{\text{asi}}^2}) \quad (4.10)$$

#### Aufgabe 4.1 Berechnung eines geschweißten Biegeträgers

Berechnung des Schwerpunktsabstands, des Flächenträgheitsmoments und aller Spannungen am geschweißten Biegeträger, durch Eingabe der symmetrisch angeordneten Flächen. Dabei wird auch eine symmetrische Anordnung und Gleichverteilung der Schweißnähte vorausgesetzt.

**Tabelle 4.1** Vereinfachtes Struktogramm zur Berechnung geschweißter Biegeträger

Eingabe aller rechteckigen Querschnitte, die zum Gesamtquerschnitt gehören, ebenso aller Kräfte und Momente
Berechnung des Schwerpunkts und des Flächenträgheitsmoments
Berechnung der Hauptspannungen am Biegeträger
Berechnung der Hauptspannungen in den Schweißnähten

Auch bei dieser Anwendung geben wir wieder ein Formblatt vor, so dass die Eingabe in einer Tabelle manuell erfolgen kann. Die Berechnungen selbst betrachten wir nachfolgend detailliert.

**Tabelle 4.2** Struktogramm zur Berechnung des Schwerpunktabstands und des Flächenträgheitsmoments

Alle Summen = 0
Über alle vorhandenen Elemente $i=1, \dots, n$
$H = H + h_i$
$\sum A_i = \sum A_i + b_i \cdot h_i$
$\sum A_i e_i = \sum A_i e_i + b_i \cdot h_i \cdot e_i$
$\sum \frac{b_i}{12} h_i^3 = \sum \frac{b_i}{12} h_i^3 + \frac{b_i}{12} h_i^3$
$\sum A_i e_i^2 = \sum A_i e_i^2 + b_i \cdot h_i \cdot e_i^2$

$e = \frac{\sum A_i e_i}{\sum A_i}$
$I = \sum \left( \frac{b_i}{12} h_i^3 + A_i e_i^2 \right) - e^2 A$
Ausgabe H, e, I

**Tabelle 4.3** Struktogramm Hauptspannungen im Biegeträger

$\sigma_Z = \frac{F_N}{A}$
$\tau_a = \frac{F_Q}{A}$
$\sigma_{b1} = \frac{M_b(H-e)}{I}$
$\sigma_{b2} = -\frac{M_b e}{I}$
$\sigma_{hj} = \frac{1}{2} (\sigma_{bj} + \sigma_Z + \sqrt{(\sigma_{bj} + \sigma_Z)^2 + 4\tau_a^2}), j = 1, 2$
Ausgabe $\sigma_Z, \tau_a, \sigma_{b1}, \sigma_{b2}, \sigma_{h1}, \sigma_{h2}$

**Tabelle 4.4** Struktogramm Hauptspannungen in den Schweißnähten

Über alle vorhandenen Elemente $i=2, \dots, n$
$\sigma_{bsi} = \frac{M_b}{I} (s_i - e)$
$\tau_{asi} = \frac{F_Q b_i h_i  e_i - e }{I \sum a_i}$
$\sigma_{hsi} = \frac{1}{2} (\sigma_{bsi} + \sigma_Z + \sqrt{(\sigma_{bsi} + \sigma_Z)^2 + 4\tau_{asi}^2})$
Ausgabe $\sigma_{bsi}, \tau_{asi}, \sigma_{hsi}$

Zur Ausführung benötigen wir wieder ein Formblatt und die üblichen Testdaten zum Ausprobieren. Das Formblatt bekommt den Namen *Geschweißter Biegeträger* und im Project-Explorer den Objektnamen *tblTräger*. Hier werden dann die in der Codeliste 4.1 dargestellten Prozeduren eingetragen.



**Bild 4-4**  
Projekt-Explorer zum geschweißten  
Biegeträger

**Code-Liste 4.1** Prozeduren im Tabellenblatt tblTräger

```
Option Explicit

'
'Prozedur zur Erstellung eines Formblatts
Sub Formblatt()
'
'Tabelle löschen
Worksheets("Geschweißter Biegeträger").Activate
Worksheets("Geschweißter Biegeträger").Cells.Clear
'
'Formblatt
Range("A1") = "FN [N] "
Range("A2") = "FQ [N] "
Range("A3") = "Mb [Nm] "
Range("A5") = "H [mm] "
Range("A6") = "e [mm] "
Range("A7") = "A [cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A8") = "I [cm^4]"
Range("A9") = ChrW(963) & "z [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A10") = ChrW(964) & "a [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A11") = ChrW(963) & "b1 [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A12") = ChrW(963) & "b2 [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A13") = ChrW(963) & "h1 [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A14") = ChrW(963) & "h2 [N/cm" + ChrW(178) + "]"

Range("C1:E1").MergeCells = True
Range("C1:E1") = "Maße"
Range("C2") = "b [mm] "
Range("D2") = "h [mm] "
Range("E2") = "a [mm] "

Range("F1") = "Schwerpkt."
Range("F2") = "e [mm] "
Range("G1:I1").MergeCells = True
Range("G1:I1") = "Schweißnähte"
Range("G2") = ChrW(963) & "b [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("H2") = ChrW(964) & "a [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("I2") = ChrW(963) & "h [N/cm" + ChrW(178) + "]"
```

```
Range("A:A").ColumnWidth = 12
Range("B:I").ColumnWidth = 10
Columns("A:I").Select
Selection.NumberFormat = "0.00"
Range("A2").Select
End Sub

Sub Testbeispiel()
Cells(1, 2) = 5000
Cells(2, 2) = 1000
Cells(3, 2) = 500
Cells(3, 3) = 600
Cells(3, 4) = 100
Cells(3, 5) = 0
Cells(4, 3) = 200
Cells(4, 4) = 200
Cells(4, 5) = 5
Cells(5, 3) = 100
Cells(5, 4) = 100
Cells(5, 5) = 4
Cells(6, 3) = 400
Cells(6, 4) = 50
Cells(6, 5) = 4
End Sub

Sub Auswertung()
Dim Zeile, i As Integer
Dim H, e, si As Double
Dim s1, s2, s3, s4 As Double 'Summen
s1 = 0: s2 = 0: s3 = 0: s4 = 0
Zeile = 3

'Summenbildung
Do While Cells(Zeile, 3) > 0
    e = H + Cells(Zeile, 4) / 2
    Cells(Zeile, 6) = e
    H = H + Cells(Zeile, 4)
    s1 = s1 + Cells(Zeile, 3) * Cells(Zeile, 4)
    s2 = s2 + Cells(Zeile, 3) * Cells(Zeile, 4) * e
    s3 = s3 + Cells(Zeile, 3) / 12 * Cells(Zeile, 4) ^ 3
    s4 = s4 + Cells(Zeile, 3) * Cells(Zeile, 4) * e ^ 2
    Zeile = Zeile + 1
Loop

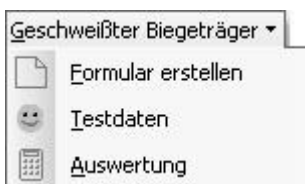
'Maße und Spannungen
```

```

Cells(5, 2) = H
Cells(6, 2) = s2 / s1
Cells(7, 2) = s1 / 100
Cells(8, 2) = (s3 + s4 - Cells(6, 2) ^ 2 * s1) / 10000
Cells(9, 2) = Cells(1, 2) / Cells(7, 2)
Cells(10, 2) = Cells(2, 2) / Cells(7, 2)
Cells(11, 2) = Cells(3, 2) * 100 * Cells(6, 2) / 10 / Cells(8, 2)
Cells(12, 2) = Cells(3, 2) * 100 * (Cells(6, 2) - H) / 10 / Cells(8, 2)
Cells(13, 2) = (Cells(11, 2) + Cells(9, 2) + _
    Sqr((Cells(11, 2) + Cells(9, 2)) ^ 2 + 4 * Cells(10, 2) ^ 2)) / 2
Cells(14, 2) = (Cells(12, 2) + Cells(9, 2) + _
    Sqr((Cells(12, 2) + Cells(9, 2)) ^ 2 + 4 * Cells(10, 2) ^ 2)) / 2
'Schweißnähte
si = 0
For i = 3 To Zeile - 1
    If Cells(i, 5) > 0 Then
        Cells(i, 7) = Cells(3, 2) * 100 * (Cells(6, 2) - si) / 10 _
            / Cells(8, 2)
        Cells(i, 8) = Cells(2, 2) / Cells(8, 2) / 2 * Cells(i, 5) / 10
        Cells(i, 8) = Cells(i, 8) * Cells(i, 3) * Cells(i, 4) / 100
        Cells(i, 8) = Cells(i, 8) * Abs(Cells(i, 6) - Cells(6, 2))
        Cells(i, 9) = (Cells(i, 7) + Cells(9, 2) + _
            Sqr((Cells(i, 7) + Cells(9, 2)) ^ 2 + 4 * Cells(i, 8) ^ 2)) / 2
    End If
    si = si + Cells(i, 4)
Next i
End Sub

```

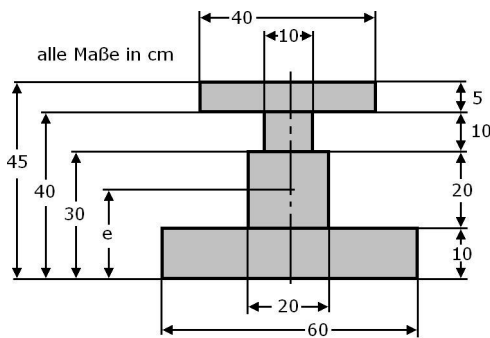
Eine neue Symbolleiste mit dem Namen Kapitel 4 erhält ein Menü mit dem Namen *Geschweißter Biegeträger* und die drei dargestellten Menüpunkte.



**Bild 4-5**  
Menü zum geschweißten Biegeträger

#### Beispiel 4.1 Laufschiene eines Werkkrans

Die in Bild 4-6 dargestellte Laufschiene wird mit einer Normalkraft von  $F_N = 5000$  N, einer Querkraft von  $F_Q = 1000$  N und einem Biegemoment von  $M_b = 500$  Nm belastet. Zu bestimmen sind die Hauptspannungen im Biegeträger und in den Schweißnähten.



**Bild 4-6**  
Laufschiene eines Werkkrans

Die Berechnung mit den eingebauten Testdaten liefert nachfolgendes Ergebnis.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	FN [N]	5000,00	Maße			Schwerpkt.	Schweißnähte		
2	FQ [N]	1000,00	b [mm]	h [mm]	a [mm]	e [mm]	ob [N/cm <sup>2</sup> ]	ta [N/cm <sup>2</sup> ]	oh [N/cm <sup>2</sup> ]
3	Mb [Nm]	500,00	600,00	100,00	0,00	50,00			
4			200,00	200,00	5,00	200,00	1,42	8,60	11,53
5	H [mm]	450,00	100,00	100,00	4,00	360,00	-2,27	12,75	13,57
6	e [mm]	176,92	400,00	50,00	4,00	425,00	-4,11	36,56	36,43
7	A [cm <sup>2</sup> ]	1300,00							
8	I [cm <sup>4</sup> ]	271410,26							
9	oz [N/cm <sup>2</sup> ]	3,85							
10	ta [N/cm <sup>2</sup> ]	0,77							
11	ob1 [N/cm <sup>2</sup> ]	3,26							
12	ob2 [N/cm <sup>2</sup> ]	-5,03							
13	oh1 [N/cm <sup>2</sup> ]	7,19							
14	oh2 [N/cm <sup>2</sup> ]	0,36							

**Bild 4-7**  
Ergebnis der Testdatenauswertung

## Übungsvorschläge

Leider sind die grafischen Darstellungsmöglichkeiten unter VBA sehr begrenzt. Eine Möglichkeit graphische Elemente darzustellen sind *Shapes*.

Mit der Anweisung

```
(Ausdruck).AddShape(Type, Left, Top, Width, Height)
```

und dem Type *msoShapeRectangle* lassen sich Rechtecke auf dem Arbeitsblatt platzieren.

So erzeugt die Anweisung

```
Shapes.AddShape msoShapeRectangle, 200, 100, 80, 60
```

ausgehend von der linken oberen Ecke, 200 Punkte nach rechts und 100 Punkte von oben, ein Rechteck mit der Breite von 80 Punkten und der Höhe von 60 Punkten.

Mit der *Visual Basic-Hilfe* finden Sie unter dem Index *Addshape* einen Hilfstext, in dem der Link *msoAutoShapeType* eine Vielzahl möglicher Shapeformen anbietet.

## 4.2 Die Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf ein Biegeproblem

Die Monte-Carlo-Methode ist die Bezeichnung für ein Verfahren, das mit Zufallszahlen arbeitet. Dazu werden Pseudozufallszahlen (Pseudo deshalb, da diese Zahlen nach einer gesetzmäßigen Methode gebildet werden) erzeugt. Es sind Zahlen, willkürlich aus dem halboffenen Intervall [0,1) mit der Eigenschaft, dass bei einer hinreichenden Anzahl von Zahlen eine Gleichverteilung auf dem Intervall vorliegt (Gesetz der großen Zahl).

Zu ihrer Verwendung werden sie in das entsprechende Intervall transformiert. Sodann wird diese *zufällig* gewonnene Stichprobe auf Zuverlässigkeit untersucht und falls diese erfüllt sind, auf ein Optimierungskriterium hin getestet. Ist dieses Kriterium besser erfüllt als ein bereits gewonnenes Ergebnis, so liegt eine Verbesserung vor.

Betrachten wir diese Methode an einem einseitig eingespannten Biegeträger, der durch eine Einzelkraft belastet wird.

**Bild 4-8**

Einseitig eingespannter Biegeträger unter Einzellast

Das Verhältnis von  $b/h$  soll konstant bleiben, also

$$\frac{b}{h} = k = \text{konstant} . \quad (4.11)$$

Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die zulässige Biegung nicht überschritten wird

$$\frac{6 \cdot F \cdot l}{k \cdot h^3} \leq \sigma_{\text{zul}} \quad (4.12)$$

und dass eine vorgegebene Durchbiegung nicht unterschritten wird

$$\frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \leq f_{\text{zul}} . \quad (4.13)$$

#### **Aufgabe 4.2** Das kleinste Volumen eines Biegeträgers

Gesucht ist das kleinste Volumen des dargestellten Biegeträgers (Bild 4-8)

$$V = k \cdot h^2 \cdot l \quad (4.14)$$

für die Grenzen

$$h_{\text{min}} \leq h \leq h_{\text{max}} \quad (4.15)$$


$$l_{\text{min}} \leq l \leq l_{\text{max}} . \quad (4.16)$$

**Tabelle 4.5** Struktogramm Monto-Carlo-Methode am Biegeträger

Eingabe $F, E, I, l, k, \sigma_{\text{zul}}, f_{\text{zul}}, h_{\text{min}}, h_{\text{max}}, l_{\text{min}}, l_{\text{max}}, n$
$V_0 = V_{\text{max}} = k \cdot h_{\text{max}}^2 \cdot l_{\text{max}}$
$i=1$ : Randomize
solange $i < n$

x = Rnd(x)	
$h_i = (h_{\max} - h_{\min})x + h_{\min}$	
x=Rnd(x)	
$l_i = (l_{\max} - l_{\min})x + l_{\min}$	
$\sigma_i = \frac{6 \cdot F \cdot l_i}{k \cdot h_i^3}$	
$\sigma_i \leq \sigma_{zul}$	
nein	ja
$I_i = \frac{h_i^4}{48}$	
$f_i = \frac{F \cdot l_i^3}{3 \cdot E \cdot I}$	
$f_i \leq f_{zul}$	
nein	ja
$V_i = k \cdot h_i^2 \cdot l_i$	
$V_i \leq V_0$	
nein	ja
Ausgabe n, h <sub>i</sub> , l <sub>i</sub> , σ <sub>i</sub> , I <sub>i</sub> , f <sub>i</sub> , V <sub>i</sub>	
V <sub>0</sub> = V <sub>i</sub>	

Das Menü gleicht dem vorangegangenen Beispiel. Auch hier benötigen wir ein Tabellenblatt (Monte-Carlo) und schreiben darin die erforderlichen Prozeduren.



**Bild 4-9**  
Menü zur Monte-Carlo-Methode

**Codeliste 4.2** Prozeduren im Tabellenblatt tblMonteCarlo

```

Option Explicit
'Prozedur zur Erstellung eines Formblatts
Sub Formblatt()
,
'Tabelle löschen
    
```

```
Worksheets("Monte-Carlo").Activate
Worksheets("Monte-Carlo").Cells.Clear

'Formblatt
Range("A1") = "F [N]"
Range("A2") = "E [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A3") = "k "
Range("A4") = ChrW(963) & "zul [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("A5") = "fzul [cm]"
Range("A6") = "hmin [cm]"
Range("A7") = "hmax [cm]"
Range("A8") = "lmin [cm]"
Range("A9") = "lmax [cm]"
Range("A10") = "n"
Range("C1:I1").MergeCells = True
Range("C1:I1") = "Auswertung"
Range("C2") = "n"
Range("D2") = "h [cm]"
Range("E2") = "l [cm]"
Range("F2") = ChrW(963) & " [N/cm" + ChrW(178) + "]"
Range("G2") = "I [cm^4]"
Range("H2") = "f [cm]"
Range("I2") = "V [cm" + ChrW(179) + "]"
Range("A:B").ColumnWidth = 15
Range("C:I").ColumnWidth = 10
Columns("A:G").Select
Selection.NumberFormat = "0.00"
Columns("H:H").Select
Selection.NumberFormat = "0.00000"
Columns("I:I").Select
Selection.NumberFormat = "0.000"
Range("A2").Select
End Sub

Sub Testdaten()
Cells(1, 2) = 20000
Cells(2, 2) = 21000000
Cells(3, 2) = 0.25
Cells(4, 2) = 6000
Cells(5, 2) = 0.3
Cells(6, 2) = 22
Cells(7, 2) = 26
Cells(8, 2) = 150
Cells(9, 2) = 250
Cells(10, 2) = 1000000
End Sub
```

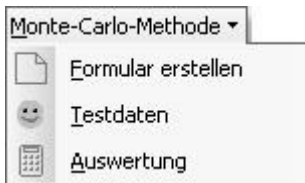
```
Sub Auswertung()  
  Dim F, E, l, k, Szul, fzul, hmin, hmax, lmin, lmax, n As Double  
  Dim i, j As Integer  
  Dim x, V0, hi, li, Si, Ii, Vi, fi As Double  
  F = Cells(1, 2)  
  E = Cells(2, 2)  
  k = Cells(3, 2)  
  Szul = Cells(4, 2)  
  fzul = Cells(5, 2)  
  hmin = Cells(6, 2)  
  hmax = Cells(7, 2)  
  lmin = Cells(8, 2)  
  lmax = Cells(9, 2)  
  n = Cells(10, 2)  
  
  V0 = k * hmax * hmax * lmax  
  i = 0: j = 2  
  Randomize  
  x = 0  
  Do  
    x = Rnd(x)  
    hi = (hmax - hmin) * x + hmin  
    x = Rnd(x)  
    li = (lmax - lmin) * x + lmin  
    Si = 6 * F * li / (k * hi ^ 3)  
    If Si <= Szul Then  
      Ii = hi ^ 4 / 48  
      fi = F * li ^ 3 / (3 * E * Ii)  
      If fi <= fzul Then  
        Vi = k * hi ^ 2 * li  
        If Vi <= V0 Then  
          j = j + 1  
          Cells(j, 3) = i  
          Cells(j, 4) = hi  
          Cells(j, 5) = li  
          Cells(j, 6) = Si  
          Cells(j, 7) = Ii  
          Cells(j, 8) = fi  
          Cells(j, 9) = Vi  
          V0 = Vi  
        End If  
      End If  
    End If  
    i = i + 1  
  Loop
```

```

Loop While i <= n
End Sub

```

Die Symbolleiste wird um das Menü *Monte-Carlo-Methode* erweitert und bekommt die Menüpunkte *Formular erstellen*, *Testdaten* und *Auswertung*. Die Prozedurzuweisung erfolgt wieder beim ersten Aufruf.



**Bild 4-10**  
Menü Monte-Carlo-Methode

### Beispiel 4.2 Stützträger

Ein Stützträger wird mit einer Einzellast von 20000 N belastet. Es ist  $E = 21.000.000 \text{ N/cm}^2$ . Die zulässige Spannung soll  $10.000 \text{ N/cm}^2$  nicht überschreiten. Die maximal zulässige Durchbiegung ist 3 mm und das Verhältnis von  $b/h$  soll 0,25 betragen. Der Träger darf eine Höhe zwischen 22 und 26 cm, sowie eine Länge von 150 cm bis 250 cm einnehmen. Gesucht werden die Abmessungen, die unter Berücksichtigung der Belastungsgrenze ein minimales Volumen ergeben.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	F [N]	20000,00	Auswertung						
2	E [N/cm <sup>2</sup> ]	21000000,00	n	h [cm]	l [cm]	$\sigma$ [N/cm <sup>2</sup> ]	I [cm <sup>4</sup> ]	f [cm]	V [cm <sup>3</sup> ]
3	k	0,25	8,000	23,901	176,742	6213,366	6798,815	0,268	25241,671
4	erzul [N/cm <sup>2</sup> ]	10000,00	17,000	24,411	162,116	5349,190	7398,289	0,183	24151,962
5	fzul [cm]	0,30	18,000	23,409	173,813	6603,690	6266,199	0,266	23912,134
6	hmin [cm]	22,00	22,000	22,068	157,466	7032,919	4940,957	0,251	19171,222
7	hmax [cm]	26,00	388,000	22,247	152,888	6664,804	5103,407	0,222	18917,463
8	lmin [cm]	150,00	954,000	22,069	154,911	6918,055	4941,717	0,239	18861,738
9	lmax [cm]	250,00	1100,000	22,066	153,686	6866,058	4939,139	0,233	18707,763
10	n	1000000,00	1549,000	22,220	150,021	6563,451	5078,935	0,211	18518,185
11			1575,000	22,055	151,152	6763,216	4929,035	0,222	18380,441
12			4632,000	22,001	151,486	6827,987	4881,140	0,226	18331,357
13			6132,000	22,030	151,027	6780,539	4906,843	0,223	18323,873
14			8294,000	22,023	150,096	6744,948	4900,801	0,219	18199,637
15			64657,000	22,008	150,155	6761,052	4887,800	0,220	18182,616
16			133259,000	22,011	150,002	6761,963	4889,902	0,219	18167,989
17			299868,000	22,002	150,083	6763,664	4882,151	0,220	18163,368
18			668537,000	22,001	150,045	6763,182	4881,002	0,220	18156,731
19			728013,000	22,002	150,032	6761,830	4881,735	0,220	18156,607

**Bild 4-11**  
Ergebnis zum Testbeispiel Monte-Carlo-Methode

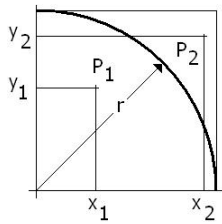
Das Ergebnis war vorauszusehen. Allerdings sieht es schon anders aus, wenn weitere Belastungsarten wie Biegung, Verdrehung und/oder Schub hinzukommen.

### Übungsvorschläge

Belegen Sie den berechneten Träger zusätzlich mit einer Streckenlast und werten Sie dann das Testbeispiel noch einmal aus. Üben Sie auch mit anderen Trägerarten, wie z. B. einen beidseitig frei aufliegenden Träger. Auch hier zunächst erst mit Einzellast und danach Kombinationen. Wie verhalten sich die Systeme, wenn ein zusätzliches Biegemoment auftritt?

Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Integration von Funktionen, deren Funktionswert sich berechnen lässt, die aber nicht integriert werden können. Oder die Bestimmung von Flächen in Landkarten, z. B. Seen, ist mit dieser Methode möglich.

Als Beispiel wählen wir einen Viertelkreis.



**Bild 4-12**

Flächenbestimmung nach der Monte-Carlo-Methode

Benutzt man zwei Intervalle mit einer Gleichverteilung, dann erhalten die damit erzeugten Punkte in einer Ebene ebenfalls eine Gleichverteilung. Diese Eigenschaft nutzt diese Methode zur Flächenbestimmung. In Bild 4-12 liegt der Punkt  $P_1$  in der gesuchten Fläche (Treffer), der Punkte  $P_2$  jedoch außerhalb.

Einen Punkt  $P_1$  erzeugt man durch zwei Zufallszahlen  $x_i$  und  $y_i$ . Ob  $P_i$  ein Treffer ist, ergibt sich aus der Formel des Pythagoras mit

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq r \quad (4.17)$$

Setzt man  $r=1$ , dann können die im Intervall  $(0,1]$  erzeugten Zufallszahlen direkt als Koordinaten eines Punktes in der Ebene verwendet werden.

Erzeugt man hinreichend viele Punkte  $n$  und hat damit  $m$  Treffer ( $m < n$ ), und sind  $A_K$  der Flächeninhalt des Viertelkreises und  $A_Q$  der Flächeninhalt des Quadrats, dann gilt das Verhältnis

$$\frac{m}{n} = \frac{A_K}{A_Q} \quad (4.18)$$

Und damit

$$A_K = \frac{m}{n} \cdot A_Q \quad (4.19)$$

Benutzen Sie für Ihre Betrachtung unterschiedliche Größen von  $n$ .